Spectral properties for killed symmetric Markov processes with applications to Brownian motion in unbounded domains

著者	松浦 浩平
号	84
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	理博第3175号
URL	http://hdl.handle.net/10097/00125423

（別紙様式５）

論　文　内　容　要　旨

(NO.　1)

氏　　名	松浦　浩平	提出年	平成 30　年
学位論文の 題　　　目	Spectral properties for killed symmetric Markov processes with applications to Brownian motion in unbounded domains （消滅する対称マルコフ過程のスペクトル的性質と 非有界領域上のブラウン運動への応用）		

論　文　目　次

論文要旨

d 次元ブラウン運動が古典的なディリクレ積分と１対１対応することはよく知られている．実はこの

対応は，より一般の確率過程に対しても成り立つ．これは福島の定理と呼ばれ，対称なマルコフ過程と対称な正則ディリクレ形式が 1 対 1 対応することを主張する．しかし，この対応はマルコフ半群を経由する間接的なものであり，ディリクレ形式のもつ解析的データが，対応するマルコフ過程にどのように反映されるかは明らかではない．同時に，マルコフ過程がもつ確率論的データが，対応するディリクレ形式や微分作用素にどのように反映されるかも明らかではない．このメカニズムを明らかにする 1 つの試みとして，緊密性という概念が提唱されている．これは, 1 次元拡散過程のフェラーの境界分類における，流出，流入，正則境界条件の一般化に相当する．近年，竹田によって，緊密性をもつマルコフ過程の(正確には対応する微分作用素の)スペクトルは離散的であることが示された．本論文では，この緊密性の概念を精査する．特に，緊密性の仮定を強めたとき，マルコフ過程に対応する半群が L1 空間上のコンパクト作用素になることを示す．また，この結果を具体的な解析の問題に応用する．本論文の内容は 3 部からなる．以下，各部の内容について述べる．

第 2 部について述べる. 2016 年の竹田による先行研究では，緊密性をもつマルコフ過程のスペクトルの離散性，固有関数の有界性が証明された．本論文では次を示した:

定理 2.4 強い緊密性をもつマルコフ過程の半群は L1 空間上のコンパクト作用素になる．

従来の緊密性はマルコフ過程の 1-レゾルベントを用いて定義されるのに対し，強い緊密性は 0-レゾルベントを用いて定義される．よって，強い緊密性をもつマルコフ過程は再帰的ではない．また，半群が L1 空間上のコンパクト作用素になることから，対応する微分作用素のスペクトルが Lp-不変になること，固有関数は有界可積分になることが分かる．拡散作用素のスペクトルの Lp-不変性は熱核の具体的な評価を用いて研究されてきた．著者の結果は, Dynkin-Hunt 公式による確率論的手法に基づく点が新しい．吸収壁対称安定過程に対しては，これが強い緊密性をもつこととその半群が L1 空間の上でコンパクトになることは同値である(定理 2.10)．またこの結果は，非有界な係数をもつ分数冪ラプラシアンのスペクトル解析に応用できる(定理 2.16)．緊密性をもつマルコフ過程の例は，2017 年に竹田，田原，土田において論じられた．これらの例は全て強い緊密性をもつ．従来の緊密性と強い緊密性の間にどの程度差異があるかは今のところ分かっていない．マルコフ過程が過渡的な場合，これらの概念は同値であると予想されている．

第 3 部について述べる．ユークリッド空間の領域上には，ノイマン・ラプラシアン，ディリクレ・ラプラシアンをはじめとする 2 階の微分作用素を定義することが出来る．これらの微分作用素のスペクトルを決定することは解析学において基本的な問題である．スペクトルが離散的になる条件はよく調べられている．例えば，有界かつなめらかな領域上のノイマン・ラプラシアンのスペクトルは離散的になる(レーリッヒの定理)．また，領域の体積が有限なら，その上のディリクレ・ラプラシアンのスペクトルは離散的になる．ロバン境界条件は，ノイマン境界条件とディリクレ境界条件の線形結合で与えられる、この境界条件をもつラプラシアンをロバン・ラプラシアンと呼ぶ. 2003 年に Arendt と Warma は，領域の体積が有限という仮定のもと，このラプラシアンのスペクトルの離散性を得ていた．体積無限の場合にロバン・ラプラシアンのスペクトルの離散性を調べ，彼らの結果を拡張することは自然な問題である．著者は，ロバン・ラプラシアンに対応するマルコフ過程を決定し，それが強い緊密性をもつか調べた．実

は，このマルコフ過程は領域上の反射壁ブラウン運動をその局所時間で消滅させることで得られる．そこで，非有界領域上の反射壁ブラウン運動とその局所時間の性質を詳しく調べた．有界なリプシッツ領域上の反射壁ブラウン運動は半群強フェラー性をもつ．非有界なリプシッツ領域でも，それがある種の内部球条件を満たせばその上の反射壁ブラウン運動はレゾルベント強フェラー性をもつことが知られている．本研究では, Moser と Stampacchia による偏微分方程式の議論とマルコフ過程のポテンシャル論を組み合わせることで次の主張を得た:

定理 3.6 任意のリプシッツ領域上の反射壁ブラウン運動の半群は強フェラー性をもつ.

また，反射壁ブラウン運動の局所的な熱核評価を用いることで局所時間に関する評価が得られる．この評価とロバン・ラプラシアンに対応する半群の熱核の評価を用いて次を得ることが出来る:

定理 3.7 リプシッツ領域上のロバン･ラプラシアンに対応するマルコフ過程は半群強フェラー性をもつ. さらに領域が無限遠点近傍で尖細ならば，このマルコフ過程は強い緊密性をもつ.

無限遠点近傍で尖細という条件は，ディリクレ・ラプラシアンのスペクトルが離散的になる十分条件としてよく知られている．この条件は体積が無限な場合を含み，ロバン・ラプラシアンに対応する半群のトレースも無限に成り得る点が, Arendt と Warma の結果に比べて新しい.

　第 4 部について述べる．多次元領域上の，緊密性をもつマルコフ過程の例は 2017 年に竹田，田原，土田によって考察された．しかし，これらは全て過渡的で有限な生存時間をもつ．そこで著者は，horn-shape 領域上の反射壁ブラウン運動が緊密性をもつ条件を調べた．特に，horn の減衰度と緊密性の関係を調べた．多次元 horn-shape 領域は, {(x,y) ∈R×R^d: |y|<H(x), x>1}で定義される．ここで, H は正値リプシッツ連続関数である．第 4 部の主結果は次のようになる:

定理 4.8 H(x)=exp(―x^α)のとき, horn-shape 領域上の反射壁ブラウン運動が緊密性をもつ必要十分条件はα>2.

この主張は，より一般のリプシッツ連続関数に対しても成り立つ. 1992 年に Davies と Simon は，α>1 に相当する条件の下で反射壁ブラウン運動の半群が L2 空間上のコンパクト作用素になることを示していた．第 4 部では，α>2 の時に反射壁ブラウン運動の半群が L1 空間上のコンパクト作用素になることも示した．このことから，α>2 の時は，ノイマン・ラプラシアンのスペクトルが Lp 不変性をもつことが分かる. horn の減衰度に応じて，スペクトルのより細かな分類が出来ている点が興味深い.

　緊密性はマルコフ過程のエルゴード性とも密接な関係をもつ．平面領域上の反射壁ブラウン運動に対する一様エルゴード性は, 2006 年に Burdzy-Chen-Marshall によって調べられた．彼らは 2 次元 horn-shape 領域上の反射壁ブラウン運動が一様エルゴード性をもつ必要十分条件を与えた．彼らの証明は複素解析による．本論文では伊藤解析を用いることで，多次元 horn-shape 領域上の反射壁ブラウン運動が一様エルゴード性をもつ十分条件も与えた(定理 4.6).

別　紙

論文審査の結果の要旨

本論文では、対称マルコフ半群のスペクトル的性質、特にコンパクト性について確率論的手法をもちいて研究した。対称マルコフ過程が、既約性、強フェラー性に加えて強緊密性、すなわち定数関数の 0-リゾルベントが無限遠点で零となる性質を満たすならば、その生成するマルコフ半群は L^1-コンパクトであることを示した。この事実から、L^p-スペクトルの p-独立性や全ての L^2-固有関数の L^p-可積分性が従う。この結果は、従来示されていた L^2-コンパクト性を強める結果であるのみならず、ディンキン・ハントの公式を用いる証明方法は、従来の方法と全く異なる独創性の高いものである。

松浦君は、具体的な無限領域上のブラウン運動に対して強緊密性を確認した。ディリクレ境界条件付きのラプラシアン、すなわち吸収壁ブラウン運動に対しては、領域の幾何の言葉で条件が与えられが、反射壁境界ブラウン運動については、無限遠点近傍で領域が小さいだけではコンパクト性は従わず、小さくなるオーダーを定めることが必要になる。また、境界の滑らかさも必要になる。松浦君はホーン型領域上の反射壁ブラウン運動に対して領域を定義する関数の減衰オーダーに対する条件で強緊密性の十分条件を与えた。強緊密性を持つ多次元で保存的なマルコフ過程の例としては、初めての例になっている。また松浦君は、吸収壁と反射壁の間を繋ぐロバン（弾性）境界条件付きブラウン運動の緊密性を、境界の局所時間の評価をもちいて示した。そして、″thin at infinity″とよばれる無限遠点で小さいリプシッツ領域に対して、強緊密性を示した。

これらの事実は確率論的な応用をもつ。上で述べたホーン型領域上の反射壁ブラウン運動の緊密性から、初期値に関する一様なドンスカー・バラダァーン型の大偏差原理が従う。状態空間が多次元でコンパクトでないマルコフ過程で一様なドンスカー・バラダァーン型の大偏差原理が成立する例を与えており新しい。また、L^1-コンパクト性から第一固有関数の可積分性が従い、準定常分布が第一固有関数をとおして明示的に構成される。必ず消滅するマルコフ過程のモデルに対しては、準定常分布の存在を示すことがマルコフ過程の長時間挙動を調べる上で重要になる。さらには、一様なエルゴード性、コンパクト集合への到達時刻の期待値が初期値に関して有界であることも導かれる。

以上のように、自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって、松浦浩平提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。